Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

FINAL – 6/12/2024

Apellido y Nombre:…………………………………………………………………………………………

Número de documento: ………………………………………………………………………………

TEMA 5

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto
- Todas las respuestas deben estar justificadas

EJERCICIO 1: La ecuación $9x^2 + kx + 28 = 28$ tiene dos soluciones reales diferentes $x_1 > x_2$. La diferencia entre ellas es igual a 1. Determinar todos los posibles valores de k.

EJERCICIO 2:

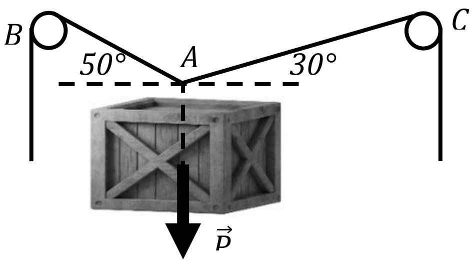
(a) Dadas las curvas C_1 y C_2 de ecuaciones $\sqrt{241 - x^2} = y$ y $x + y^2 = 31$ respectivamente, determinar las coordenadas de la/s interseccion/es de C_1 y C_2.

(b) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / \, f(x) = 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1}$ determinar $f^{-1}(x)$ y dar su dominio.

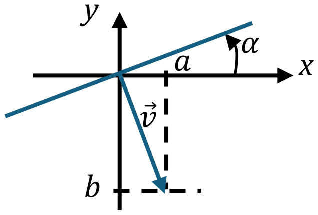
EJERCICIO 3: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal de la cual se sabe que $f(1) = 12$. Sea $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x} + c$. Sea $h: D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = g \circ f(x)$. Sabiendo que la gráfica ce h tiene una asíntota vertical de ecuación *x = - 3* y una asíntota horizontal de ecuación *y=2*. Hallar $h^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

EJERCICIO 4:

(a) Una caja de peso 750N se mantiene suspendida a través de dos poleas (ver figura). Determinar el módulo de la fuerza ejercida, en Newton, por el tramo de la cuerda *AB*. Suponer cuerdas rígidas de peso despreciable.



(b)



Determinar el vector $\vec{v}$ de la figura sabiendo que su módulo es 72N y que es perpendicular a la recta de ecuación $x - \sqrt{3}y = 0$.

EJERCICIO 5:

(a) Calcular el área de un octógono regular de lado 2*cm*.

(b) El octógono de la parte a) está inscripto en una circunferencia de radio *r*, donde $r = \sqrt{\frac{a+b\sqrt{2}}{2}}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Dar los valores *a* y *b*.

(resuelto por Sylvina)

Final	Seminario Universitario	1
	UTN BA	6-12-24

Ej 1 La ~~[illegible]~~ de ecuación $9x^2 + kx + 28 = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes, $x_1 > x_2$.
La diferencia entre ellas es igual a 1.
Determinar todos los posibles valores de k.

2 soluciones reales $\Rightarrow$ discriminante > 0

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \times 9 \times 28}}{2 \times 9}$$

$$\sqrt{k^2 - 1008} > 0 \rightarrow k^2 - 1008 > 0 \rightarrow k^2 > 1008 \rightarrow |k| > 12\sqrt{7}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 1008}}{18} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-k + \sqrt{k^2 - 1008}}{18} \\ x_2 = \dfrac{-k - \sqrt{k^2 - 1008}}{18} \end{array}$$

$$\boxed{x_1 - x_2 = 1}$$

$$\frac{-k + \sqrt{k^2 - 1008}}{18} - \frac{-k - \sqrt{k^2 - 1008}}{18} =$$

$$= \frac{\cancel{-k} + \sqrt{k^2 - 1008} \cancel{+k} + \sqrt{k^2 - 1008}}{18} = 1 = \frac{\cancel{2}\sqrt{k^2 - 1008}}{\cancel{18}\,9}$$

$$9 = \sqrt{k^2 - 1008} \rightarrow 81 = k^2 - 1008$$

$$1089 = k^2 \rightarrow |k| = 33$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k_1 = 33 \\ k_2 = -33 \end{array}}$$

(resuelto por Sylvina)

$\boxed{\text{EJ 2}}$ a) Dadas las curvas C_1 y C_2 de ecuaciones:

$$\sqrt{241-x^2}=y \quad y \quad x+y^2=31$$

respectivamente, determinar las coordenadas de la/s intersecciones C_1 y C_2.

$$C_1: \; y=\sqrt{241-x^2} \rightarrow y^2=241-x^2$$

$$C_2: \; x+y^2=31 \longrightarrow x+241-x^2=31$$

$$0=x^2-x-210 \quad \begin{cases} x_1=15 \\ x_2=-14 \end{cases}$$

$$y_1=\sqrt{241-x_1^2}=4$$

$$y_2=\sqrt{241-x_2^2}=3\sqrt{5}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1=(15,4) \\ \hline P_2=(-14,3\sqrt{5}) \end{array}}$$

b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ / f(x)=2^{x+1}+2^x+2^{x-1}$ determinar $f^{-1}(x)$ y dar su dominio

$$f(x)=2^{x+1}+2^x+2^{x-1}=2\cdot 2^x+2^x+\frac{2^x}{2}=2^x\left(2+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}2^x$$

$$y=\frac{7}{2}2^x \rightarrow \frac{2}{7}y=2^x \longrightarrow \log_2\left(\frac{2}{7}y\right)=\log_2\left(2^x\right)=x$$

$$\boxed{f^{-1}(x)=\log_2\left(\frac{2}{7}x\right)} \quad \boxed{\mathrm{dom}(f^{-1})=\{x\in\mathbb{R} / x>0\}}$$

(resuelto por Sylvina)

Final	Seminario Universitario UTN BA	2 6-12-24

EJ 3 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal de la cual se sabe que $f(1) = 12$

Sea $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x} + C$.

Sea $h: D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (g \circ f)(x)$

Sabiendo que la gráfica de h tiene una asíntota vertical de ecuación $x = -3$ y una asíntota horizontal de ec. $y = 2$

hallar $h^{-1}(5/2)$

$f(x) = mx + b$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} + c = \frac{1}{mx+b} + c = \frac{\overbrace{1 + c(mx+b)}^{cmx + (cb+1)}}{mx+b} \quad \text{I}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{cmx + (cb+1)}{mx+b}$$

AV: $x = -3 \to \boxed{m(-3) + b = 0}$ (*)

AH: $y = 2 \Rightarrow \frac{cm}{m} = \boxed{2 = c}$

$b = 12 - m$

$f(1) = m1 + b = 12 \to \boxed{m + b = 12}$ (*)

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{x} + 2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3m + b = 0 \\ m + b = 12 \end{array}\right. \to m = 3, \ b = 9 \quad \boxed{f(x) = 3x + 9}$$

I

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{3x+9} + 2}$$

$h^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = ?$

hallo x tal que $h(x) = \frac{5}{2}$

$$\frac{1}{3x+9} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\overbrace{1 + 6x + 18}^{6x+19}}{3x+9} = \frac{5}{2} \to 2(6x+19) = 5(3x+9)$$

$$12x + 38 = 15x + 45$$

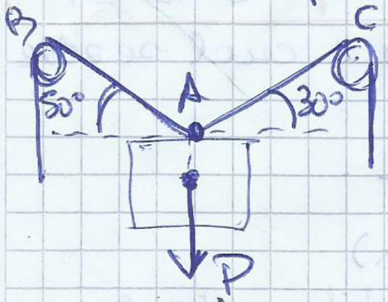
$$38 - 45 = 15x - 12x$$

$$-7 = 3x$$

$$\boxed{x = -7/3}$$

(resuelto por Sylvina)

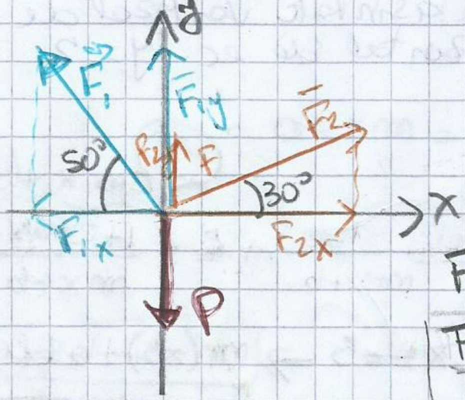
EJ 4 a) Una caja de peso 750 N se mantiene suspendida a través de dos poleas, como se muestra en la fig.



Determinar el módulo de la fuerza ejercida, en Newton, por el tramo de cuerda AB.

Suponer cuerdas rígidas de peso despreciable.

cuerda AB → $\overline{F_1}$



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{1x} + F_{2x} = 0$$

$$\boxed{F_{1x} = F_{2x}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} - P = 0$$

$$\boxed{P = F_{1y} + F_{2y}}$$

$$F_1 \cos(50) = F_2 \cos(30)$$

$$\boxed{F_1 \frac{\cos(50)}{\cos(30)} = F_2}$$

$$750\,N = F_1 \,\text{sen}(50) + F_2 \,\text{sen}(30)$$

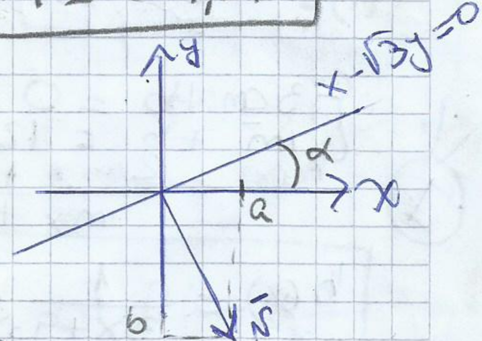
$$750\,N = F_1 \,\text{sen}(50) + F_1 \frac{\cos 50}{\cos(30)} \text{sen}\,30$$

$$750\,N = F_1 \left(\text{sen}(50) + \cos(50)\, tg(30)\right)$$

$$\boxed{F_1 = 659{,}5\,N}$$

b) Determinar el vector $\vec{N}$ de la fig. sabiendo que su módulo es 72 y que es perpendicular a la recta de ec.

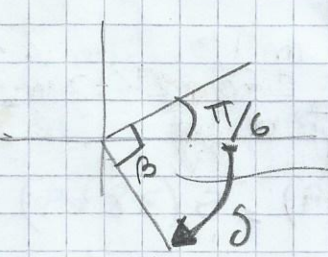
$$x - \sqrt{3}\,y = 0$$



hallo α → $x = \sqrt{3}\,y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{x} = tg(\alpha)$

$\alpha = \text{arct.}(1/\sqrt{3})$ $\quad N = (a, b)$ con $a > 0$, $b < 0$

$$\boxed{\alpha = \pi/6}$$



$\beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \overset{\pi/2}{\beta} = \delta + \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\delta = \frac{1}{3}\pi}$

$a \rightarrow \vec{N}_x = |\vec{N}| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 72 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{36 = N_x}$

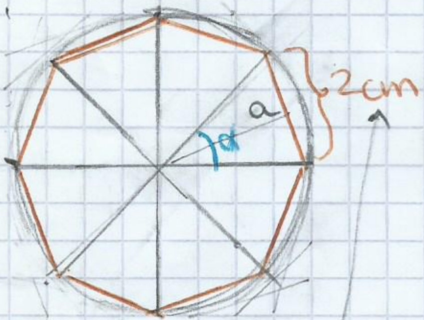
$b \rightarrow N_y = -|\vec{N}|\, \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 72\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-36\sqrt{3} = N_y}$

$$\boxed{\vec{N} = (36; -36\sqrt{3})\,N}$$

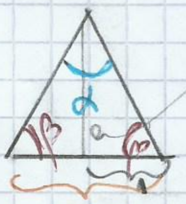
(resuelto por Sylvina)

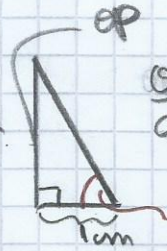
Final	Seminario Universitario	3
	UTN BA	6-12-24

EJ 5 a) Calcular el área de un octógono regular de lado 2cm.



$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$





$\frac{op}{ady} = tg\,\beta$ *

$\beta = 67{,}5°$

$2\beta + \alpha = 180°$

$\beta = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$

$op = tg(67{,}5°) \cdot 1cm$

$\boxed{op = 1 + \sqrt{2}\ cm}$ apotema

$A_{\text{oct}} = 8 A_\triangle = \cancel{8}^{4} \frac{b \cdot a}{\cancel{2}_1} = 4 \cdot 2cm \cdot apot$

$A_{oct} = 8\ cm \cdot (1+\sqrt{2})cm$

$\boxed{A = 8 + 8\sqrt{2}\ cm^2}$

b) El octógono de la parte a) está inscripto en una circunferencia de radio r, donde $r = \sqrt{\frac{a + b\sqrt{2}}{2}}$ con $a, b \in \mathbb{N}$.

Dar los valores a y b

r es la hipotenusa del triángulo rectángulo

$r^2 = op^2 + ady^2 = (1+\sqrt{2})^2 + 1^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1$

$r^2 = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow r = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

siempre $\longrightarrow r = \sqrt{\frac{a + b\sqrt{2}}{2}}$

$4 + 2\sqrt{2} = \frac{a + b\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 2(4 + 2\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$

$\underbrace{8 + 4\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}}$

$\boxed{a = 8,\ b = 4}$

(resuelto por Sylvina)